

ΠΡΟΤΑΣΗ:

- i) Έστω $T(x)$ επαρκής σ.σ. για την παράμετρο θ και $\hat{\theta}$ ο εμπειρικός μέγιστος πιθανοφάνειας του θ , ο οποίος είναι μοναδικός. Τότε $\hat{\theta}$ είναι συνάρτηση του $T(x)$
 ii) Ίδια διατύπωση με i) για $\hat{\theta}$ του εμπειρικού Bayes.

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ i.i.d. από έναν πληθυσμό με σ.π.π. ή σ.π. $f(x|\theta)$ όπου θ είναι μια άγνωστη αλλά σταθερή ποσότητα. Ο εμπειρικός μέγιστος πιθανοφάνειας της παραμέτρου θ είναι η τιμή εκείνης της θ για την οποία μεγιστοποιείται η συνάρτηση πιθανοφάνειας (από κοινού κατανομή των $x_1, \dots, x_n$), η οποία ορίζεται $L(\theta|x) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$
 ή αναλλοίωτα μεγιστοποιούμε την $\log L(\theta|x)$

ΑΠΩΔΕΙΞΗ:

- i) Ο ΕΜΠ $\hat{\theta}$ προκύπτει από την μεγιστοποίηση της $L(\theta|x) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$ α)

Αφού $T(x)$ επαρκής σ.σ. αυτό σημαίνει από παραχροντίο θεώρημα ότι:

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = g(T(x), \theta) h(x) \quad (2)$$

Ο ΕΜΠ $\hat{\theta}$ μεγιστοποιεί την $L(\theta|x) = g(T(x), \theta) h(x)$.

$$\hat{\theta} = \max_{\theta} g(T(x), \theta) \text{ για κάθε } x$$

Για να δείξουμε ότι ο $\hat{\theta}$ είναι συνάρτηση του $T(x)$ αρκεί ν δ.ο. $\forall x_1, x_2$ με $T(x_1) = T(x_2)$ τότε $\hat{\theta}(x_1) = \hat{\theta}(x_2)$.

$$\hat{\theta}(x_1) = \max_{\theta} g(T(x_1), \theta)$$

$$\hat{\theta}(x_2) = \max_{\theta} g(T(x_2), \theta)$$

Λόγω και μοναδικότητας $\hat{\theta}(x_1) = \hat{\theta}(x_2)$

iv) Ο εμπειρικός Bayes $\tilde{\theta}$ προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της:

$\min_{\theta} E_{\pi(x)} L(\theta, d)$, δηλ. της (συνεχούς περίπτωση)

$$\int L(\theta, d) \pi(\theta | x) d\theta \Rightarrow \int L(\theta, d) \cdot \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \pi(\theta) d\theta$$

ή ισοδύναμα από την ελαχιστοποίηση αυτής

ή ισοδύναμα από σχέση (2) ελαχιστ.

ή ισοδύναμα: $\int L(\theta, d) \pi(\theta) g(\pi(x), \theta) h(x) d\theta$.

$$\tilde{\theta} = \min_d \int L(\theta, d) \pi(\theta) g(\pi(x), \theta) d\theta$$

από την στιγμή που πριν θ από τον θ δεν θα δώσει θ

$$= \min_d q(\pi(x), d) \quad \forall x$$

Για να δείξουμε ότι ο $\tilde{\theta}$ είναι συνάρτηση του $\pi(x)$ αρκεί ν.δ.ο. $\forall x_1, x_2$ με $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ τότε $\tilde{\theta}(x_1) = \tilde{\theta}(x_2)$. $\tilde{\theta}(x_1) = \min_d q(\pi(x_1), d)$

$$\tilde{\theta}(x_2) = \min_d q(\pi(x_2), d)$$

Οπότε όπως και πριν $\tilde{\theta}(x_1) = \tilde{\theta}(x_2)$

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από την $U(\theta, \theta+1)$. Βρείτε τον εμπειρική Η.Π. Εξετάστε αν είναι μοναδικός και αν πάντοτε είναι συνάρτηση της επαρκούς σ.σ.

ΛΥΣΗ:

$$f(x_i | \theta) = 1, \quad \theta < x_i < \theta+1$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = \prod_{i=1}^n 1 = 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta < x_1 < \theta+1 \\ \vdots \\ \theta < x_n < \theta+1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 1 < \theta < x_1 \\ \vdots \\ x_n - 1 < \theta < x_n \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \max\{x_i - 1\} < \theta < \min\{x_i\} \\ x_{(n)} - 1 \quad \quad \quad x_{(1)} \end{array} \right\}$$

$(x_{(n)}, x_{(1)})$ επαρκής σ.σ.

Ε.Μ.Π. όλα τα $\theta \in (\chi_{(n)}, -1, \chi_{(1)})$

$$\lambda(\chi_{(n)} - 1) + (1 - \lambda) \chi_{(1)}$$

$$\eta \mu^2(\chi_2) | \chi_{(n)} - 1 + \sigma \nu \nu^2(\chi_2) \chi_{(1)}$$

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από την $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}, 0 < \theta \leq x$.

1) Α.Ο.Ε.Δ. της θ

2) Ε.Μ.Π. της θ

ΛΥΣΗ:

Τ.ε.α.ρ.η.ς + π.λ.η.ρ.η.ς

$$E(\varphi(T)) = 0$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) &= \prod_{i=1}^n e^{-(x_i-\theta)} = e^{-x_1} \cdot e^{\theta} e^{-x_2} \cdot e^{\theta} \dots e^{-x_n} e^{\theta} = e^{-\sum x_i} e^{n\theta} \cdot I_{(0, \chi_{(n)})}(\theta) \\ &= g(\chi_{(n)}, \theta) \cdot h(x) = e^{-\sum x_i} e^{n\theta}, \theta \leq \chi_{(n)} \\ &\quad \downarrow \text{αύξουσα συνάρτηση του } \theta. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta \leq x_1 \\ \theta \leq x_2 \\ \vdots \\ \theta \leq x_n \end{array} \right\} \theta \leq \min x_i \quad \text{Άρα, } \hat{\theta} = \chi_{(n)} \text{ μοναδικός και συνάρτηση του ε.α.ρ.η.ς.}$$

$$T = \chi_{(n)}$$

$$E(h(T)) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0, \forall t.$$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(\min X_i \leq t) = 1 - P(\min X_i > t) = 1 - P(X_1 > t, X_2 > t, \dots, X_n > t) \\ &= 1 - P^n(X > t) = 1 - (1 - P(X \leq t))^n = 1 - (1 - F_X(t))^n \end{aligned}$$

$$f_T(t) = n(1 - F_X(t))^{n-1} f_X(t) \quad \leftarrow \text{σ.π.π.}$$

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_0^t e^{-(x-\theta)} dx \stackrel{x-\theta=y}{=} \int_0^{t-\theta} e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_0^{t-\theta} = 1 - e^{-(t-\theta)}, t \geq \theta.$$

$$f(t) = n[1 - 1 + e^{-(t-\theta)}]^{n-1} e^{-(t-\theta)} = n e^{-n(t-\theta)}, t \geq \theta$$

$$E h(\pi) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\int_{\theta}^{+\infty} h(t) n e^{-n(t-\theta)} dt = 0 \quad \forall \theta$$

$$\int_{\theta}^{+\infty} h(t) e^{-nt} dt = 0$$

$$-h(\theta) e^{-n\theta} = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(\theta) = 0 \quad \forall \theta$$

$$\Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t.$$

$$EU(\pi) = g(\theta) \Rightarrow \int_{\theta}^{+\infty} U(t) n e^{-n(t-\theta)} dt = g(\theta) \quad \forall \theta.$$

$$\Rightarrow \int_{\theta}^{+\infty} U(t) e^{-nt} dt = \frac{g(\theta)}{n e^{n\theta}}$$

$$\Rightarrow -U(\theta) e^{-n\theta} = \left(\frac{g(\theta)}{n e^{n\theta}} \right)'$$

Εύρεση διαστήματος εμπιστοσύνης με τις μεθόδους της κλασικής στατιστικής συμπερασματολογίας

Στη κλασική στατιστική συμπερασματολογία, το πρόβλημα αναφέρεται στην εύρεση μιας αυστηρής ποσότητας $Q = Q(x, \theta)$ που είναι τέτοια ώστε να είναι συνάρτηση των $x_1, x_2, \dots, x_n$ και του θ και η οποία θα έχει κατανομή ανεξάρτητη του θ και ελπίσεων θα είναι τέτοια ώστε η $P(p < Q(x, \theta) < u) = 1 - \alpha$ να μπορεί να οδηγήσει σε μια $P(q_1 < \theta < q_2) = 1 - \alpha$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Εστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από την $N(\mu, \sigma^2)$, σε γνώση N . Να βρείτε δ.ε. ελαχίστου μήκους για τη παράμετρο μ .

$$T = \sum_{i=1}^n x_i \text{ επαρκής } \sigma. \sigma.$$

$$x_1, \dots, x_n \text{ τ.δ. } N(\mu, \sigma^2), \quad \sum_{i=1}^n x_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

τυπικός μετασχηματισμός

$$Q = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$P(q_1 \leq \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow P(q_1 \sqrt{n}\sigma \leq \sum X_i - n\mu \leq q_2 \sqrt{n}\sigma) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P(q_1 \sqrt{n}\sigma - \sum X_i \leq -n\mu \leq q_2 \sqrt{n}\sigma - \sum X_i) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\sum X_i}{n} - q_2 \frac{\sqrt{n}\sigma}{n} \leq \mu \leq \frac{\sum X_i}{n} - q_1 \frac{\sqrt{n}\sigma}{n}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - q_2 \sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} - q_1 \sigma / \sqrt{n}\right) = 1 - \alpha.$$

$$l = (q_2 - q_1) \sigma / \sqrt{n}$$

$$\frac{dl}{dq_1} = \left(\frac{dq_2}{dq_1} - 1\right) \sigma / \sqrt{n} \Rightarrow \textcircled{*}$$

$$P(q_1 \leq Q \leq q_2) = 1 - \alpha$$

$$F_Q(q_2) - F_Q(q_1) = 1 - \alpha$$

$$\frac{d}{dq_1} F_Q(q_2) - \frac{d}{dq_1} F_Q(q_1) = 0$$

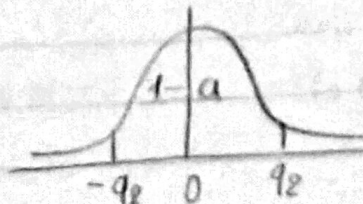
$$\underbrace{\frac{d}{dq_2} F_Q(q_2)}_{f_Q(q_2)} \frac{dq_2}{dq_1} - f_Q(q_1) = 0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_Q(q_1)}{f_Q(q_2)}$$

$$\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\pi_{\Theta|X}(q_1)}{\pi_{\Theta|X}(q_2)}$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} \frac{dl}{dq_1} = \left(\frac{f_Q(q_1)}{f_Q(q_2)} - 1\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \left(\frac{f_Q(q_1) - f_Q(q_2)}{f_Q(q_2)}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}q_1^2} - e^{-\frac{1}{2}q_2^2}}{e^{-\frac{1}{2}q_2^2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{dl}{dq_1} = 0 \Rightarrow e^{-q_1^2/2} = e^{-q_2^2/2} \Rightarrow q_1^2 = q_2^2 \Rightarrow q_1 = \pm q_2 \text{ οπότε } q_1 = -q_2$$

$$P(-q_2 \leq Q \leq q_2) = 1 - \alpha$$



$q_2 = z_{\alpha/2}$, $z_{\alpha/2}$ είναι το σημείο ευρέως ώστε $P(Q \geq z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$ όταν $Q \sim N(0,1)$

$$\left(\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$ τα μ, σ^2 άγνωστα και θέλουμε δ.ε για το μ .

ΛΥΣΗ:

$$P f(x_i | \theta) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2} \dots = g(\sum x_i, \sum x_i^2, \mu, \sigma^2) h(x)$$

Άρα, επαρκής $T = (\sum x_i, \sum x_i^2)$

$$\frac{\sum x_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0,1) \text{ ή } \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

Πρέπει να βρω $Q(\sum x_i, \sum x_i^2, \mu)$

Όταν έχω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$ ισχύει $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

$$\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_{n-1}^2/n}} \sim t_{n-1}$$

Στην κανονική κατανομή το $\bar{X}$ είναι ανεξάρτητο από το S^2 οπότε:

$$Q = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$t_v \cdot \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}} \frac{(1 + \frac{t^2}{v})^{-\frac{v+1}{2}}}{\Gamma(v/2)}$$

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει:

$$P(\bar{X} - q_2 \cdot S/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} - q_1 \cdot S/\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

$$l = q_2 - q_1 \cdot S/\sqrt{n}$$

$$\frac{dl}{dq_1} = \dots = \frac{f_2(q_1) - f_2(q_2)}{f_2(q_2)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{dl}{dq_1} = \frac{\left(1 + \frac{q_1^2}{n-1}\right)^{-\frac{(n-1)+1}{2}} - \left(1 + \frac{q_2^2}{n-1}\right)^{-\frac{(n-1)+1}{2}}}{\left(1 + \frac{q_2^2}{n-1}\right)^{-\frac{(n-1)+1}{2}}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{dl}{dq_1} = 0 \Rightarrow q_1^2 = q_2^2 \Rightarrow q_1 = -q_2$$

$$\text{Με το ίδιο σκεπτικό } q_2 = t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από την κανονική κατανομή με μ και σ^2 και τα δύο άγνωστα. Θέλουμε να βρούμε δ.ε. για το σ^2 .

ΛΥΣΗ:

$$Q = Q(\sum X_i, \sum X_i^2, \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$$P\left(q_1 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq q_2\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{1}{q_2} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{q_1}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{q_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right) = 1 - \alpha$$

$$l = (n-1)S^2 \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)$$

$$\frac{dl}{dq_1} = (n-1)S^2 \left(-\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \frac{dq_2}{dq_1}\right) \overset{\text{όπως πριν}}{=} (n-1)S^2 \left(-\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \cdot \frac{f_2(q_1)}{f_2(q_2)}\right) =$$

$$\{Q \sim \chi_{n-1}^2 \equiv \text{Γάρμα}\left(\frac{n-1}{2}, 2\right)\}$$

$$\ln-1)S' \left(-\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \frac{q_1^{\frac{n-1}{2}} - 1}{q_2^{\frac{n-1}{2}} - 1} e^{-q_1/n} \right)$$

Δεν μπορεί να βρεθεί λύση του $\frac{dl}{dq_1} = 0$ σε κλειστή αναλυτική μορφή,

άρα δεν μπορεί να προσδιοριστούν δε ελαστικοί μισοί.

Άρα πάλι σε δε. ίσων ουρών.

$$\begin{array}{l|l} P(Q \leq q_1) = \frac{\alpha}{2} & q_1 = \chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2 \\ P(Q \geq q_2) = \frac{\alpha}{2} & q_2 = \chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2 \end{array} \quad \left| \quad \text{δεδωμένου ότι } \alpha = P(Q \geq \chi_{n,\alpha}^2) \right.$$